CNM – 2008/2009
corrigé Math 1 – TSI

EXERCICE

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + y^2 - 1.$$

1) (a) $\sqrt{\ }$ est cont sur $\mathbb{R}^+$ et $[(x,y) \mapsto x^2+y^2]$ est un polynôme cont à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ alors $[(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}]$ est cont sur $\mathbb{R}^2$ de même le polynôme $((x,y) \mapsto y^2-1)$ est cont sur $\mathbb{R}^2$ alors h est somme sur $\mathbb{R}^2$ de deux applications continues sur $\mathbb{R}^2$. h est alors continue sur $\mathbb{R}^2$.

(b) $\sqrt{\ }$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{*+}$ et $[(x,y) \mapsto x^2+y^2]$ est un polynôme de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{*+}$ alors $[(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}]$ est C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, et puisque le polynôme $[(x,y) \mapsto y^2-1]$ est C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \quad \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2y}$$

(c) $h(x,0) = |x| - 1$

pour $x \neq 0$ $\quad \dfrac{h(x,0)-h(0,0)}{x} = \dfrac{|x|}{x}$ $\xrightarrow[x \to 0^+]{} 1$, $\xrightarrow[x \to 0^-]{} -1$

alors $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \dfrac{h(x,0)-h(0,0)}{x}$ n'existe pas, de même $\lim\limits_{\substack{y \to 0 \\ y \neq 0}} \dfrac{h(0,y)-h(0,0)}{y}$ n'existe pas

$\boxed{\dfrac{\partial h}{\partial x}(0,0) \text{ et } \dfrac{\partial h}{\partial y}(0,0) \text{ n'existent pas}}$

2) (a) L'application $[(x,y)\overset{H}{\longmapsto}\sqrt{x^2+y^2}]$ est cont sur $\mathbb{R}^2$ (page 2)

à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $]0,2[$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$

$H^{-1}(]0,2[)$ est alors un ouvert de $\mathbb{R}^2$ c'àd

$\boxed{\mathcal{U}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tq } 0<\sqrt{x^2+y^2}<2\} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^2}$

(b) Soit $(x,y)\in\mathcal{U}$ $\quad(x,y)$ est un point critique de h ssi

$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)=0$ ssi $x=0$ et $\frac{y}{|y|}+2y=0$

ssi $x=0$ et $\frac{1}{|y|}=-2$ impossible

$\boxed{\text{h n'a pas de point critique dans } \mathcal{U}}$

(c) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tq } x^2+y^2\leq 4\}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$

sur lequel h est cont à valeurs réelles, alors

$\boxed{\text{h est bornée sur } D \text{ et y atteint ses bornes}}$

$\forall (x,y)\in D$, $h(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+y^2-1\geqslant -1=h(0,0)$

et si $(x,y)\in D$, $(x,y)\neq(0,0)$ $\quad h(x,y)>-1$ alors

$\boxed{\text{(0,0) est un minimum de h sur D et c'est le seul point de D où h atteint son minimum.}}$

h n'a pas de point critique dans $\mathcal{U}=\overset{\circ}{D}\setminus\{(0,0)\}$, alors

h ne peut atteindre son maximum sur $\mathcal{U}$ alors h

atteint son maximum en un point de $[\partial D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tq } x^2+y^2=4\}]$

si $(x,y)\in\partial D$; $h(x,y)=1+y^2\leq 5$

$h(0,2)=5$ et $(0,2)\in\partial D$

d'où $\boxed{\text{Les points de D où h atteint son maximum sont (0,2) et (0,-2) et on a : } h(0,2)=h(0,-2)=5}$

PROBLÈME

1ère Partie : Calcul d'une intégrale et étude d'une fonction

A- Calcul de l'intégrale de Gauss

1) $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $e^{-t^2} = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$

alors $[t \mapsto e^{-t^2}]$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, en particulier $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge.

2) $\forall x \geq 0$; $0 \leq \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$ et $\left[t \mapsto \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\right]$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

et $\left(t \mapsto \frac{1}{1+t^2}\right]$ est continue intégrable sur $\mathbb{R}^+$, d'où $\forall x \geq 0$

$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$ est convergente. On pose : $\forall x \geq 0$ $\Psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$.

3) $\Psi(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$. $\boxed{\Psi(0) = \frac{\pi}{2}}$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \Big[x \leq y \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \frac{e^{-yt^2}}{1+t^2} \leq \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{e^{-yt^2}}{1+t^2} dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$

$\Rightarrow \Psi(y) \leq \Psi(x) \Big]$

$\boxed{\Psi \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}^+}$

4) (a) L'application $\left[(x,t) \mapsto \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\right]$ est continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ et

$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \quad 0 \leq \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$ et $\left[t \mapsto \frac{1}{1+t^2}\right]$ est continue

intégrable sur $\mathbb{R}^+$ alors $\boxed{\Psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt \text{ définit une application continue sur } \mathbb{R}^+}$

(b) Soit $a > 0$, l'application $\left[(x,t) \xrightarrow{f} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\right]$ est de classe C^1 sur

$]a,+\infty[\times \mathbb{R}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{-t^2}{1+t^2} e^{-xt^2}$ $\quad \forall (x,t) \in]a,+\infty[\times \mathbb{R}^+$

$\forall (x,t) \in]a,+\infty[\times \mathbb{R}^+ \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-at^2}$ et $[t \mapsto e^{-at^2}]$

est continue intégrable sur $\mathbb{R}^+$ $\left(e^{-at^2} = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)$.

alors $\forall a>0$, ψ est C^1 sur $]a,+\infty[$ et $\forall x\in]a,+\infty[$

$$\psi'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2} e^{-xt^2}\,dt$$

Finalement $\boxed{\psi \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^{*+} \text{ et } \forall x>0 \quad \psi'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2} e^{-xt^2}\,dt}$

(c) $\forall x>0$ $\quad \psi'(x) - \psi(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,dt$, on pose : $u = t\sqrt{x}$, $dt = \frac{du}{\sqrt{x}}$

$$\psi'(x) - \psi(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{-\tau}{\sqrt{x}} \quad \text{où } \tau = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$$

d'où $\boxed{\psi \text{ est solution sur } \mathbb{R}^{*+} \text{ de l'équation différentielle } \; y - y' = \frac{\tau}{\sqrt{x}}}$

5) (a) soit $x>0$ $\quad 0 \le \psi(x) \le \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,dt = \frac{\tau}{\sqrt{x}}$ (voir la question précédente)

$\boxed{\forall x>0 \; ; \quad 0 \le \psi(x) \le \frac{\tau}{\sqrt{x}}}$

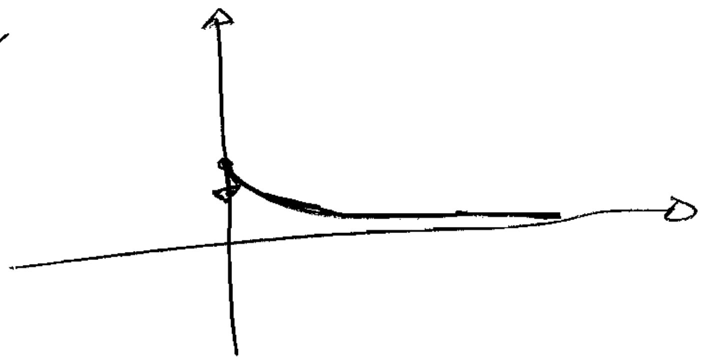
(b) D'après I]-4)(c) $\forall x>0$ $\quad \sqrt{x}\,\psi(x) - \sqrt{x}\,\psi'(x) = \tau$

or ψ est continue en 0 alors $\psi'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{-\tau}{\sqrt{x}}$

d'où $\boxed{\lim_{x\to 0^+} \psi'(x) = -\infty}$

alors le graphe de ψ admet en 0 une tangente verticale. ψ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et d'après 5)(a) $\lim_{+\infty} \psi(x) = 0$

d'où l'allure du graphe de ψ



6) On pose : $\lambda(x) = e^{-x}\varphi(x)$, $x \geq 0$.

(a) $t \longmapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est cont sur $]0,+\infty[$ et $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ Page 5

alors $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$ converge, de m̂ $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{t^{1/2}}$ alors $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$ converge, d'où $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$ converge.

(b) $\forall x \geq 0 \quad \lambda(x) = e^{-x}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}dt$

$\lambda(x)e^{x} = \varphi(x)$ est solution sur $\mathbb{R}^{*+}$ de $y - y' = \frac{\tau}{\sqrt{x}}$.

$\lambda(x)e^{x} - \lambda(x)e^{x} - \lambda'(x)e^{x} = \frac{\tau}{\sqrt{x}} \Rightarrow \lambda'(x) = -\tau\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$

alors $\exists c \in \mathbb{R}$ tq $\forall x > 0 \quad \lambda(x) = c - \tau\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$

et puisque λ est cont sur $\mathbb{R}^+$ alors $\forall x \geq 0$. $\lambda(x) = c - \tau\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$

$\lambda(0) = c = \varphi(0) = \frac{\pi}{2}$. d'où

$$\boxed{\forall x \geq 0 \quad \lambda(x) = \frac{\pi}{2} - \tau\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt}$$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \lambda(x) = 0$ alors

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = \frac{\pi}{2\tau}}$$

(c) on pose : $u = \sqrt{t}$ alors $t = u^2$ et $du = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$, alors

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du}$$

D'après les deux résultats précédents $\frac{\pi}{2\tau} = 2\tau$

or $\tau \geq 0$ d'où $\boxed{\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$ càd $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

B – Étude d'une fonction

On note F et f les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2}dt \quad \text{et} \quad f(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$$

1) (a) $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} ; \quad F(x) = f(x^2) - f(x)}$

page6

(b) $[t \longmapsto e^{t^2}]$ est continue sur $\mathbb{R}$ alors f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, alors d'après (a) ci-dessus F est C^1 sur $\mathbb{R}$

et on a : $\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = 2x f(x^2) - f(x)$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}; \quad F'(x) = 2x e^{-x^4} - e^{-x^2}}$$

2) $[t \longmapsto e^{-t^2}]$ est continue strictement positive sur $\mathbb{R}$.
Alors :

* si $x < 0$ alors $x < x^2$ alors $F(x) > 0$
* si $x \in]0,1[$ alors $0 < x^2 < x < 1$ alors $F(x) < 0$
* si $x > 1$ alors $1 < x < x^2$ alors $F(x) > 0$
* $F(0) = F(1) = 0$.

3) (a) pour $x < 0$ $F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt + \int_0^{-x} e^{-t^2} dt \xrightarrow[x \to -\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt + \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

or d'après la partie précédente : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

d'où $$\boxed{\lim_{x \to -\infty} F(x) = \sqrt{\pi}}$$

(b) pour $x \geq 1$, et $t \geq x$ on a : $t \leq t^2 \Rightarrow e^{-t^2} \leq e^{-t}$ alors

$$F(x) \leq \int_x^{x^2} e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_x^{x^2}.$$

$$\boxed{\forall x \geq 1; \quad 0 \leq F(x) \leq e^{-x} - e^{-x^2}}$$

alors $$\boxed{\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0}$$

4) On pose : $g(x) = 2x e^{x^2 - x^4} - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = 2 e^{x^2 - x^4} + 2x(2x - 4x^3) e^{x^2 - x^4}$$

$$g'(x) = 2(1 + 2x^2 - 4x^4) e^{x^2 - x^4}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^4 - 2x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x^2 - \tfrac{1}{2}\right)^2 - 5/4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(2x^2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 0$$

or $2x^2 \geq 0$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ alors

$$g'(x) = 0 \iff x^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \iff \boxed{x = \pm \frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2}}$$

(b) le trinôme $1+2t-4t^2$ admet pour racines $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ le trinôme est alors positif pour t entre ces deux racines négatif sinon alors pour x^2 entre 0 et $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ $g'(x) \geq 0$ et $g'(x) < 0$ sinon, d'où le tableau de variations

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2}$		0	a		$\frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2}$		b		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0		$+$			0	$-$			
$g(x)$	-1	$\searrow$	$g\left(-\frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2}\right)$	$\nearrow$	$g(0)=-1$	0	$\nearrow$	$g\left(\frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2}\right)$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

Posons : $\alpha = \frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2}$, $g(\alpha) \simeq 1{,}099 > 0$ / $g(1) = 1 > 0$, $g(0) = -1 < 0$, $\lim_{+\infty} g = -1 < 0$, il existe alors d'après le Th des valeurs intermédiaires $a \in]0, \alpha[$ et $b > 1$ tq $g(a) = g(b) = 0$.

5) (a) $\forall x \in \mathbb{R}$ $F'(x) = 2x e^{-x^4} - e^{-x^2} = e^{-x^2}\left(2x e^{x^2 - x^4} - 1\right)$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $F'(x) = e^{-x^2} g(x)$

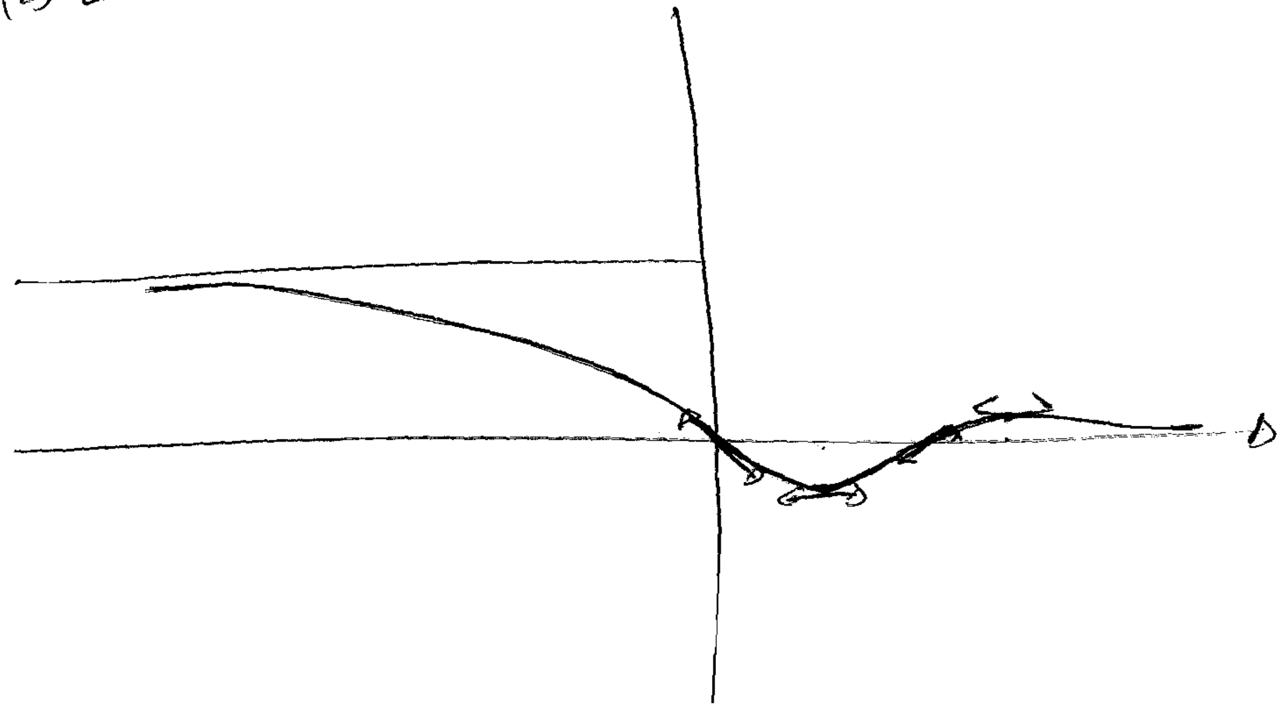
le signe de $F'(x)$ est celui de $g(x)$, d'où le tableau de var

x	$-\infty$		0		a		1		b		$+\infty$
$F'(x)$		$-$			0		$+$		0	$-$	
$F(x)$	$\sqrt{\pi}$	$\searrow$	0		$F(a)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$F(b)$	$\searrow$	0

On a : $b>1$, alors $\boxed{F(b)>0}$ d'après IB 2)

$a \in]0,\alpha[\subset]0,1[$ alors $\boxed{F(a)<0}$

(b) L'allure de la courbe de F est la suivante :



$F'(0)=-1$; $F'(1)=e^{-1}$

2ème Partie : Un résultat d'approximation

A – Quelques résultats préliminaires

1) (a) soit $x>0$ $\quad \ln(x)=\int_1^x \frac{dt}{t}$

* si $x\geq 1$ $\quad \forall t\in(1,x)$ $\quad \frac{1}{t}\leq 1$ et $\ln(x)\leq\int_1^x dt = x-1$

* si $0<x\leq 1$ $\quad \forall t\in[x,1]$ $\quad \frac{1}{t}\geq 1$ et $\int_x^1\frac{dt}{t}\geq\int_x^1 dt$

$-\ln(x)\geq 1-x \Rightarrow \ln(x)\leq x-1$

$$\boxed{\forall x>0\ ;\ \ln(x)\leq x-1}$$

(b) soit n un entier ≥ 1 et $u\in[0,n]$

si $u\in[0,n[$ alors $1-\frac{u}{n}>0$ alors $\ln(1-\frac{u}{n})\leq-\frac{u}{n}$ (d'après 1)(a))

alors $1-\frac{u}{n}\leq e^{-u/n}$ or $1-\frac{u}{n}>0$ d'où $(1-\frac{u}{n})^n\leq e^{-u}=(e^{-\frac{u}{n}})^n$

Ceci est aussi vrai pour $u=n$, d'où

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*;\ \forall u\in[0,n];\quad e^{-u}-(1-\frac{u}{n})^n\geq 0}$$

page 9

2) (a) si $x \leq -1$ alors $x+1 \leq 0 \leq e^x$

si $x > -1$ alors $x+1>0$ et $\ln(1+x) \leq x \Rightarrow 1+x \leq e^x$ ← D'après 1) (a)

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R};\ e^x \geq x+1}$$

(b) soit $n \geq 1$ et $t \in [0,1]$ $\quad e^t \geq t+1 \Rightarrow e^{nt} \geq (t+1)^n$

$\Rightarrow (1-t)^n e^{nt} \geq ((1+t)(1-t))^n$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*;\ \forall t \in [0,1];\quad (1-t)^n e^{nt} \geq (1-t^2)^n}$$

(c) soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1]$ et $\varphi(t) = (1-t^2)^n - 1 + nt^2$

φ est C^1 sur $[0,1]$ et $\forall t \in [0,1]$ $\quad \varphi'(t) = -2nt(1-t^2)^{n-1} + 2nt$

$= 2nt(1-(1-t^2)^{n-1}) \geq 0$

φ est croissante sur $[0,1]$, $\varphi(0) = 0$ d'où $\forall t \in [0,1]\ \varphi(t) \geq 0$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*;\ \forall t \in [0,1];\quad (1-t^2)^n \geq 1-nt^2}$$

(d) soit $u \in [0,n]$ on pose : $u = nt$ avec $t \in [0,1]$

$$e^{-u} - \left(1-\frac{u}{n}\right)^n = e^{-nt} - (1-t)^n$$
$$= e^{-nt}\left(1-(1-t)^n e^{nt}\right)$$

or d'après (b), (c) ci-dessus $(1-t)^n e^{nt} \geq (1-t^2)^n \geq 1-nt^2$

donc $1-(1-t)^n e^{nt} \leq nt^2$

d'où $e^{-u} - \left(1-\frac{u}{n}\right)^n \leq e^{-nt}\, nt^2 = \frac{u^2}{n} e^{-u}$

d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*;\ \forall u \in [0,n] \quad 0 \leq e^{-u} - \left(1-\frac{u}{n}\right)^n \leq \frac{u^2}{n} e^{-u}}$

B- Intégrales de Wallis

$\forall n \in \mathbb{N};\ \forall \alpha \in \mathbb{R};$ on pose :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,dt \quad \text{et} \quad \binom{\alpha}{0} = 1 \text{ et } \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \text{ si } n \geq 1.$$

1) (a) $\boxed{I_0 = \frac{\pi}{2}}$; $\boxed{I_1 = 1}$ $\quad [t \mapsto \cos^n(t)]$ est continue positive

non identiquement nulle sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ alors $\boxed{\forall n \in \mathbb{N};\ I_n > 0}$

(b) soit $n \geq 2$.

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}(t)\,\sin'(t)\,dt$$
$$= \left[\cos^{n-1}(t)\sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\cos^{n-2}(t)\sin^2(t)\,dt$$
$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(t)\,(1-\cos^2(t))\,dt$$
$$= (n-1)\,I_{n-2} - (n-1)\,I_n.$$

$$\boxed{\forall n \geq 2\ ;\ nI_n = (n-1)\,I_{n-2}}$$

(c) $\forall n \geq 2 \quad n I_n I_{n-1} = (n-1) I_{n-1} I_{n-2}$

alors la suite $(n I_n I_{n-1})_{n\geq 1}$ est constante de valeur

$I_1 I_0 = \frac{\pi}{2}$.

2) (a) $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad 0 \leq \cos(t) \leq 1$

alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad 0 \leq \cos^{n+1}(t) \leq \cos^n(t)$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t)\,dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt$$

$$\boxed{\text{La suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$$

(b) $\forall n \geq 1 \quad I_n I_{n+1} \leq I_n^2 \leq I_{n-1} I_n$ (car $I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$ et $I_n > 0$)

$$\forall n \geq 1\ ; \quad \frac{\pi}{2(n+1)} \leq I_n^2 \leq \frac{\pi}{2n}$$

$$\boxed{\forall n \geq 1\ ; \quad \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \leq I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

3) (a) $\forall n \geq 1 \quad I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \cdots \times \frac{1}{2} I_0$

$$= \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} I_0 = \frac{(2n)!}{(n!)^2\, 2^{2n}} \frac{\pi}{2}$$

égalité aussi vraie pour $n = 0$, d'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}}$$

(b) Dans la suite on pose : $\lambda_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$$1 - \lambda_n\sqrt{n\pi} = 1 - \tfrac{2}{\pi} I_{2n}\sqrt{n\pi}$$

d'après II] B) 2) (b) $\quad \sqrt{\dfrac{\pi}{2(2n+1)}} \leq I_{2n} \leq \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$

$$\pi\sqrt{\frac{n}{4n+2}} \leq \sqrt{n\pi}\, I_{2n} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq 1 - \frac{2}{\pi}\sqrt{n\pi}\, I_{2n} \leq 1 - 2\sqrt{\frac{n}{4n+2}}$$

$$0 \leq 1 - \lambda_n\sqrt{n\pi} \leq 1 - \sqrt{\frac{2n}{2n+1}}$$

$$1 - \sqrt{\frac{2n}{2n+1}} = \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}}{\sqrt{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}\left(\sqrt{2n} + \sqrt{2n+1}\right)}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2n}\left(\sqrt{2n} + \sqrt{2n}\right)} = \frac{1}{4n}$$

d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* ; \quad 0 \leq 1 - \lambda_n\sqrt{n\pi} \leq \frac{1}{4n}}$

On a : $\lim\limits_{n \to \infty} 1 - \lambda_n\sqrt{n\pi} = 0$ d'où $\boxed{\lambda_n \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}}$

C – Étude d'une suite de polynômes

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $P_n = \lambda_n \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\binom{n}{k}\frac{1}{2k-1}X^{2k}$.

1) (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1]$

$t \mapsto \dfrac{1-(1-t^2)^n}{t^2}$ est cont sur $]0,x]$

$$\frac{1-(1-t^2)^n}{t^2} = \frac{1-(1-t^2)^n}{1-(1-t^2)} = \sum_{k=0}^{n-1}(1-t^2)^k \underset{t \to 0}{\longrightarrow} n$$

alors $t \mapsto \dfrac{1-(1-t^2)^n}{t^2}$ est prolongeable par continuité en 0.

d'où $\boxed{\int_0^x \frac{1-(1-t^2)^n}{t^2}\,dt \text{ est convergente}}$

(b) Soit $(n,x)\in\mathbb{N}^*\times]0,1]$

$$\forall t\in]0,x]\quad \frac{1-(1-t^2)^n}{t^2}=\frac{1}{t^2}\left(1-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k t^{2k}\right)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C_n^k t^{2k-2}$$

$$x\int_0^x \frac{1-(1-t^2)^n}{t^2}\,dt = x\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C_n^k\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\frac{x^{2k}}{2k-1}$$

$$\forall (n,x)\in\mathbb{N}^*\times[0,1];\quad f_n(x)=\lambda_n x\int_0^x \frac{1-(1-t^2)^n}{t^2}\,dt$$

<u>Remarque :</u>

$$f_n(x)=\lambda_n x\int_0^x \frac{1-(1-t^2)^n}{t^2}\,dt=\lambda_n x\sum_{i=0}^{n-1}\int_0^x (1-t^2)^i\,dt$$

$$f_n(x)=\lambda_n x\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{i}C_i^k(-1)^k\int_0^x t^{2k}\,dt=\lambda_n\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{i}(-1)^k C_i^k\frac{x^{2k+2}}{2k+1}$$

$$f_n(x)=\lambda_n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left(\sum_{i=k}^{n-1}\binom{i}{k}\right)\frac{x^{2k+2}}{2k+1}=\lambda_n\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\sum_{i=k-1}^{n-1}\binom{i}{k-1}\right)\frac{x^{2k}}{2k-1}$$

alors en identifiant les deux expressions de $f_n(x)$ on déduit la propriété $\boxed{\forall n,k\in\mathbb{N}^*,\ \left[n\geq k\Rightarrow\sum_{i=k-1}^{n-1}\binom{i}{k-1}=\binom{n}{k}\right]}$

(c) Soit $(n,x)\in\mathbb{N}^*\times]0,1]$

$$f_n(x)=\lambda_n\int_0^x \frac{1-(1-t^2)^n}{t^2}\,dt$$

Posons $t=\frac{ux}{\sqrt{n}}$ c.à.d $u=\frac{\sqrt{n}}{x}t$, $dt=\frac{x}{\sqrt{n}}du$

$$f_n(x)=\int_0^{\sqrt{n}}\frac{1-\left(1-\frac{u^2x^2}{n}\right)^n}{\frac{u^2x^2}{n}}\times\frac{x}{\sqrt{n}}\,du$$

$$f_n(x)=\lambda_n\sqrt{n}\int_0^{\sqrt{n}}\frac{1-\left(1-\frac{u^2x^2}{n}\right)^n}{u^2}\,du\qquad\forall (n,x)\in\mathbb{N}^*\times]0,1]$$

2) $\left[t \mapsto \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\right]$ est cont sur $]0,+\infty[$.

$\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{1-e^{-t^2}}{t^2} = 1$ alors $\left[t \mapsto \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\right]$ est prolongeable par continuité en 0 et donc $\int_0^1 \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}dt$ est convergente.

de m^ $0 \le \frac{1-e^{-t^2}}{t^2} \le \frac{1}{t^2}$ et $\left[t \mapsto \frac{1}{t^2}\right]$ est cont intégrable sur $[1,+\infty[$, alors $\int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}dt$ est convergente.

d'où $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}dt \text{ est convergente}}$

soit $b>a>0$; $\int_a^b \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}dt = \left[\frac{e^{-t^2}-1}{t}\right]_a^b - \int_a^b \frac{1}{t}(-2te^{-t^2})dt$

$$= \frac{e^{-b^2}-1}{b} - \frac{e^{-a^2}-1}{a} + 2\int_a^b e^{-t^2}dt$$

$$\lim_{a \to 0^+} \lim_{b \to +\infty} \int_a^b \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}dt = \sqrt{\pi}}$$

posons $t = u|x|$, $du = \frac{dt}{|x|}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-u^2x^2}}{u^2}du = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t^2}}{t^2/x^2} \times \frac{dt}{|x|} = |x|\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}dt = |x|\sqrt{\pi}$$

le resultat est aussi vrai pour $x=0$, d'où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} ; \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-u^2x^2}}{u^2}du = |x|\sqrt{\pi}}$$

3) soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$; on pose :

$$\Delta_n(x) = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1-\left(1-\frac{u^2x^2}{n}\right)^n}{u^2}du \text{ et } \Delta(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-u^2x^2}}{u^2}du$$

(a) $f_n(x) - x = \lambda_n\sqrt{n}\,\Delta_n(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Delta(x)$ d'après la question précédente et d'après II-C]1)(c).

$$\boxed{f_n(x)-x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\lambda_n\sqrt{n\pi}\,\Delta_n(x)-\Delta(x)\right)}$$

$$|f_n(x)-x| = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left|\left(\lambda_n\sqrt{n\pi}\,(\Delta_n(x)-\Delta(x)) + (\lambda_n\sqrt{n\pi}-1)\Delta(x)\right)\right|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(|\lambda_n\sqrt{n\pi}|\,|\Delta_n(x)-\Delta(x)| + |\lambda_n\sqrt{n\pi}-1|\,\Delta(x)\right)$$

or d'après II] B] 3) (b) . $|\lambda_n\sqrt{n\pi}-1| \leq \frac{1}{4n}$

$$-1 \leq -\lambda_n\sqrt{n\pi} \leq \frac{1}{4n}-1 \Rightarrow |\lambda_n\sqrt{n\pi}| \leq 1+\frac{1}{4n}$$

d'où $\boxed{|f_n(x)-x| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\left(\frac{1}{4n}+1\right)|\Delta_n(x)-\Delta(x)| + \frac{1}{4n}\Delta(x)\right)}$

(b) $$|\Delta_n(x)-\Delta(x)| = \left|\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1-\left(1-\frac{u^2x^2}{n}\right)^n}{u^2}du - \int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-u^2x^2}}{u^2}du\right|$$

$$= \left|\int_0^{\sqrt{n}} \frac{e^{-u^2x^2}-\left(1-\frac{u^2x^2}{n}\right)^n}{u^2}du - \int_{\sqrt{n}}^{+\infty}\frac{1-e^{-u^2x^2}}{u^2}du\right|$$

$$\leq \left|\int_0^{\sqrt{n}} \frac{e^{-u^2x^2}-\left(1-\frac{u^2x^2}{n}\right)^n}{u^2}du\right| + \left|\int_{\sqrt{n}}^{+\infty}\frac{1-e^{-u^2x^2}}{u^2}du\right|$$

or $u^2x^2 \in [0,n]$ alors d'après II] A] 1) (b) et 2) (d)

$$0 \leq e^{-u^2x^2} - \left(1-\frac{u^2x^2}{n}\right)^n \leq \frac{x^4u^4}{n}e^{-x^2u^2}$$

$$|\Delta_n(x)-\Delta(x)| \leq \int_0^{\sqrt{n}} \frac{e^{-u^2x^2}-\left(1-\frac{u^2x^2}{n}\right)^n}{u^2}du + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty}\frac{1-e^{-u^2x^2}}{u^2}du$$

$$\leq \int_0^{+\infty}\frac{x^4u^2}{n}e^{-x^2u^2}du + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty}\frac{du}{u^2}$$

$$|\Delta_n(x)-\Delta(x)| \leq \int_0^{+\infty}\frac{x^4u^2}{n}e^{-x^2u^2}du + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

on pose : $t = xu$, $du = \frac{dt}{x}$

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^4u^2}{n}e^{-x^2u^2}du = \int_0^{+\infty}\frac{x}{n}t^2e^{-t^2}dt$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4u^2}{n} e^{-x^2u^2}\,du = \frac{x}{n}\left[\frac{-t}{2}e^{-t^2}\right]_0^{+\infty} + \frac{x}{2n}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$$

$$= \frac{x\sqrt{\pi}}{4n} \le \frac{\sqrt{\pi}}{4n}$$

Finalement

$$|\Delta_n(x) - \Delta(x)| \le \int_0^{\sqrt{n}} \frac{e^{-u^2x^2} - \left(1-\frac{u^2x^2}{n}\right)^n}{u^2}\,du + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} \frac{1-e^{-u^2x^2}}{u^2}\,du \le \frac{\sqrt{\pi}}{4n} + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in]0,1]$

$$|P_n(x) - x| \le \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\left(\frac{1}{4n}+1\right)|\Delta_n(x) - \Delta(x)| + \frac{1}{4n}\Delta(x)\right)$$

or $\Delta(x) = |x|\sqrt{\pi} \le \sqrt{\pi}$ et $|\Delta_n(x) - \Delta(x)| \le \frac{\sqrt{\pi}}{4n} + \frac{1}{\sqrt{n}}$

et par continuité de P_n et $(x \mapsto x)$ en 0 on a alors :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\forall x \in [0,1]$

$$|P_n(x) - x| \le \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\left(\frac{1}{4n}+1\right)\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{4n}\right)$$

$$\le \left(\frac{1}{4n}+1\right)\left(\frac{1}{4n} + \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right) + \frac{1}{4n}$$

Alors :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\forall x \in [0,1]$

$$|P_n(x) - x| \le \left(\frac{1}{4n}+1\right)\left(\frac{1}{4n} + \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\right) + \frac{1}{4n}$$

et puisque P_n est paire alors :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\forall x \in [-1,1]$

$$|P_n(x) - |x|| \le \left(\frac{1}{4n}+1\right)\left(\frac{1}{4n} + \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\right) + \frac{1}{4n}$$

c-à-d

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ;\ \sup_{-1\le t\le 1} |P_n(t) - |t|| \le \left(\frac{1}{4n}+1\right)\left(\frac{1}{4n} + \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\right) + \frac{1}{4n}$$